Индивидуальное задание «Д–3» по дисциплине «Теоретическая механика», Вариант 0

Специальность ***6.040202, Механика*** Дата выдачи: ______

Студент (ка) ______ № зачетной книжки: ______ Курс: ______

Получено зачетных баллов [ ] Подпись преподавателя ______

Тема: ***«Применение теорем динамики к исследованию движения материальной точки»***

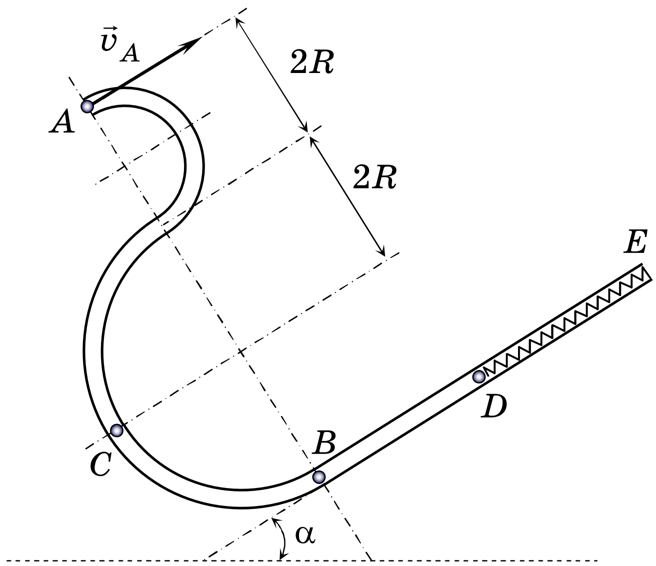
Задание:

Шарик, принимаемый за материальную точку и обладающий массой m, начинает движение из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости. Скорость v_A задана.

Найти скорость шарика в положениях B, C и D, а также давление шарика на стенку трубки в положении C.

Трением шарика о внутреннюю поверхность трубки на криволинейных участках траектории пренебречь и учитывать силу трения скольжения только на ее прямолинейных участках.

На прямолинейном участке траектории BD на материальную точку действует дополнительная сила, проекция которой на направление движения задана законом $F_x(t)$.



При переходе точки из криволинейного участка траектории (закругления) на прямолинейный и наоборот вектор скорости точки не изменяется.

На участке BD для шарика задается интервал времени его движения – τ.

Дополнительно следует определить максимальную деформацию пружины на участке DE, создаваемую движущимся шариком до его остановки, если задан коэффициент восстановления пружины c.

$$F_x(t) = \sqrt{a^2 + t^2} \quad . \tag{Д3.1}$$

Закон силы $F_x(t)$ считать заданным в ньютонах, время – в секундах, $g = 9.81$ *м/с*^{2}.

Необходимые для решения данные приведены ниже в таблице:

m, *кг*	a	c, *Н/см*	v_A, *м/с*	f	R, *м*	α	τ, *сек*
1.5	2.0	10.0	0.2	0.17	0.8	30°	0.9

Таблица результатов (*числовые данные записываются с* *тремя* *цифрами после десятичной точки*):

v_C	v_B	v_D	Δ	N	
8.373	***9.033***	***4.558***	***0.167***	***73.084***	
Баллы за результаты (указан максимум, всего – 20 баллов)					*рисунки и оформление*
2	3	3	4	3	5

Решение (*образец выполнения задания с **обязательными** пояснениями*):

1. *Рассматриваемое движение шарика, принимаемого за материальную точку, является несвободным. По условию задания нам задана стационарная траектория в виде полой трубки, расположенной в вертикальной плоскости, внутри которой совершает свое движение шарик. По этой причине на шарик во время его движения помимо внешних активных сил будут также действовать силы реакции связи (упомянутой трубки).*

Разобьем всю траекторию движения на участки, ограниченные точками, в которых по условию задания нам необходимо определить скорость шарика.

При движении на криволинейном участке траектории AC на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, а также сила $\vec{N}$ реакции трубки, которая на этом участке (по условию) является идеальной связью.

По этой причине сила реакции $\vec{N}$ в каждой точке участка траектории AC будет направлена по нормали к этой траектории (т.е. вдоль прямой, соединяющей данную точку траектории с соответствующим ей центром кривизны).

Особенность несвободного движения материальной точки состоит в том, что величина силы реакции $\vec{N}$ нам наперед не известна. Кроме того, эта сила зависит не только от действия на шарик других сил, но и от скорости движения шарика и радиуса кривизны его траектории.

Поэтому нам следует воспользоваться такими законами или теоремами динамики, в математических формулировках которых реакции идеальных связей не фигурируют (или выражения, связанные с ними, автоматически обнуляются).

На криволинейном участке AC нам неизвестно время движения шарика из положения A в положение C. Поэтому мы не можем воспользоваться теоремой об изменении количества движения, где следует подсчитывать импульс действующих сил на промежутке времени движения точки. Зато нам известен путь, проходимый шариком. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии (и кроме того, нам изначально известна скорость v_A в точке A):

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \mathrm{A}(m\vec{g}) + \mathrm{A}(\vec{N}). \tag{Д3.2}$$

Работа $\mathrm{A}(\vec{N})$ силы реакции $\vec{N}$ для рассматриваемой идеальной связи будет равна нулю, т.к. в каждой точке траектории (на криволинейном участке) вектор этой силы будет ортогонален вектору элементарного перемещения $d\vec{r}$.

Таким образом, будем иметь $\vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$. Поэтому и $\mathrm{A}(\vec{N}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$.

Для вычисления работы силы тяжести воспользуемся тем, что эта сила является потенциальной. Известно, что работа силы тяжести зависит от разности высот h, на которых была зафиксирована материальная точка во время ее движения, и рассчитывается эта работа по формуле

$$\mathrm{A}(m\vec{g}) = \pm mgh. \tag{Д3.3}$$

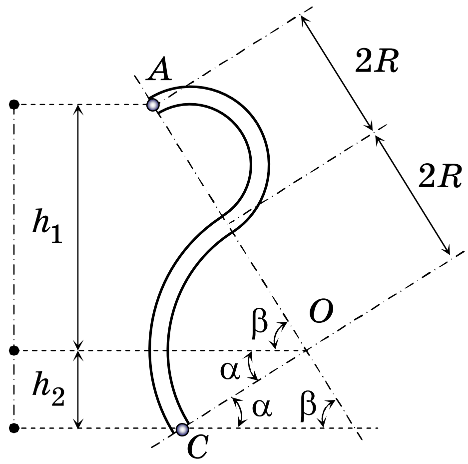
При этом знак «$+$» выбирается, когда конечное положение материальной частицы по вертикали расположено «ниже» ее начального положения, а знак «$-$» – когда наоборот.

Определим разность высот h для точек траектории A и C.

Для наглядности дальнейших действий выполним вспомогательный рисунок.

Проведем вертикальную ось (линию действия силы тяжести) слева от рисунка, содержащего участок траектории AC.

Спроектируем на эту ось точки A и C, а также центр O большего закругления участка траектории AC, что имеет радиус $2R$.



Из рисунка следует, что $h = h_1 + h_2$.

По условию задания угол $\angle COA = 90^o$.

Поэтому угол $\beta = 90^o - \alpha$.

Тогда $h_1 = OA \cdot \sin\beta$, *или с использованием угла* α *(в качестве заданного параметра задачи):*

$$h_1 = 4R \cdot \sin(90^o - \alpha) = 4R \cdot \cos\alpha.$$

Вторая высота h_2 *определяется аналогично:*

$$h_2 = OC \cdot \sin\alpha, \text{ или } h_2 = 2R \cdot \sin\alpha.$$

Таким образом, общая высота, на которую при движении из точки A *в точку* C ***опустится*** *наш шарик, составит:*

$$h = 2R \cdot (2\cos\alpha + \sin\alpha). \tag{Д3.4}$$

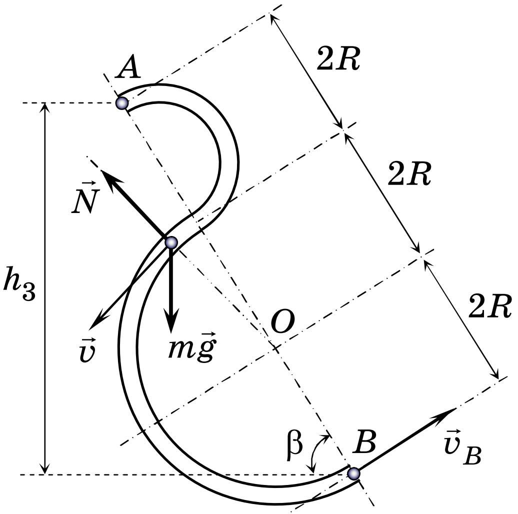
*При этом работа (Д3.3) силы тяжести должна иметь **положительный знак**.*

С учетом полученных выражений (Д3.3) и (Д3.4) переписываем формулу (Д3.2) для теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mg \cdot 2R \cdot (2\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Из последнего соотношения получаем первые расчетные формулы для искомого значения v_C *– скорости шарика в точке* C*:*

$$v_C^2 = v_A^2 + 4gR \cdot (2\cos\alpha + \sin\alpha) \quad \text{и} \quad v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR \cdot (2\cos\alpha + \sin\alpha)}. \tag{Д3.5}$$



Для определения скорости v_B *шарика в точке* B *снова воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Теперь ее математическая запись будет иметь вид:*

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \mathrm{A}(m\vec{g}) + \mathrm{A}(\vec{N}).$$

При этом работа силы тяжести будет равна $\mathrm{A}(m\vec{g}) = mgh_3$, *а работа силы реакции* $\vec{N}$, *как и в предыдущем случае, будет равна нулю* $\mathrm{A}(\vec{N}) = 0$.

Разность вертикальных координат точек A *и* B *составляет величину* $h_3 = AB \cdot \sin\beta$.

С учетом входных параметров задания имеем $h_3 = 6R \cdot \sin(90^o - \alpha) = 6R \cdot \cos\alpha$.

Таким образом, для определения величины скорости в точке B *нами получены следующие расчетные формулы:*

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh_3 = v_A^2 + 12gR \cdot \cos\alpha \quad \text{и} \quad v_B = \sqrt{v_A^2 + 12gR \cdot \cos\alpha}. \tag{Д3.6}$$

Анализ формул (Д3.5) и (Д3.6) свидетельствует о том, что скорости υ_C *и* υ_B, *которые будет иметь шарик в точках* C *и* B, *должны быть больше, чем его начальная скорость* υ_A *в точке* A *(за счет положительной работы силы тяжести).*

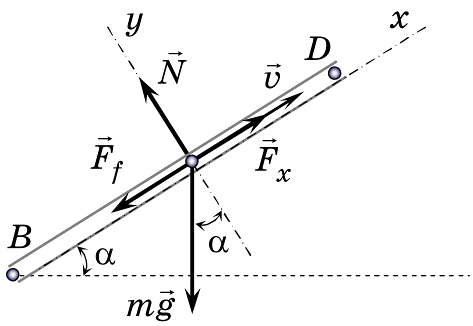
При этом, если угол $\alpha = 45^o$, *то точки* C *и* B *окажутся на общей горизонтали, и для рассматриваемого шарика значения его скоростей* υ_C *и* υ_B *будут одинаковыми.*

На прямолинейном участке траектории BD *по условию задания на движущийся шарик помимо силы тяжести* $m\vec{g}$ *действует сила трения скольжения* $\vec{F}_f$ *и переменная сила* $F_x(t)$, *проекция которой на направление движения задана законом (Д3.1). Известен промежуток времени* τ, *за который наш шарик из положения* B *достигает положения* D.

Поэтому мы можем подсчитать импульсы всех действующих сил на заданном промежутке времени и определить изменение количества движения шарика, что имело место за этот интервал времени τ.

Теорема об изменении количества движения имеет векторную форму, которая в нашем случае записывается следующим образом:

$$m\vec{\upsilon}_D - m\vec{\upsilon}_B = \int_0^\tau \left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{F}_x \right) dt. \qquad (Д3.7)$$



Изобразим на дополнительном рисунке движущийся шарик в некоторой промежуточной точке на прямолинейном участке BD *его траектории и приложим к шарику все действующие на него силы.*

В направлении движения шарика (от точки B *к точке* D*) зададим координатную ось* x, *а в ортогональном направлении – ось* y.

Траектория на прямолинейном участке (по условиям задания) уже не является идеальной связью, т.к. присутствует трение скольжения шарика о внутреннюю поверхность трубки. Поэтому (неизвестная нам наперед) сила реакции трубки $\vec{\Phi}$ *будет нами предварительно «разложена» на две ортогональные составляющие, т.е.* $\vec{\Phi} = \vec{N} + \vec{F}_f$.

В направлении оси y *изобразим нормальную составляющую* $\vec{N}$ *силы реакции связи* $\vec{\Phi}$, *а в направлении, противоположном движению шарика, изобразим вторую составляющую этой реакции – силу трения скольжения* $\vec{F}_f$.

Спроектируем векторный закон (Д3.7) на выбранные оси с учетом того, что вектор скорости шарика $\vec{\upsilon}$ *(и количества движения* $m\vec{\upsilon}$*) направлен строго по оси* x.

$$\begin{aligned} x: \quad & m\upsilon_D - m\upsilon_B = \int_0^\tau \left(-mg \cdot \sin\alpha + F_x - F_f \right) dt, \\ y: \quad & 0 = \int_0^\tau \left(-mg \cdot \cos\alpha + N \right) dt. \end{aligned} \qquad (Д3.8)$$

Из второго выражения непосредственно вытекает, что $N = mg \cdot \cos\alpha$. *Известно, что сила трения скольжения* F_f *по модулю равна произведению коэффициента трения* f *на величину силы нормального давления* N. *Поэтому мы находим, что* $F_f = N \cdot f = mgf \cdot \cos\alpha$.

Подстановка последнего выражения в первую формулу (Д3.8) дает

$$mv_D = mv_B + \int_0^\tau (F_x)\,dt + \int_0^\tau \left(-mg\cdot(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right)dt.$$

Подынтегральное выражение во втором интеграле есть величина постоянная, поэтому мы сразу имеем $\int_0^\tau \left(-mg\cdot(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right)dt = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\tau$.

Для вычисления первого из интегралов найдем первообразную для закона силы $F_x(t)$:

$$\int_0^\tau (F_x)\,dt = \int_0^\tau \sqrt{a^2+t^2}\,dt = \left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|t+\sqrt{a^2+t^2}\right|\right)\Bigg|_0^\tau =$$
$$= \frac{\tau}{2}\sqrt{a^2+\tau^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\tau+\sqrt{a^2+\tau^2}\right| - \frac{a^2}{2}\ln|a| = \Psi(a,\tau)\,. \qquad \text{(Д3.9)}$$

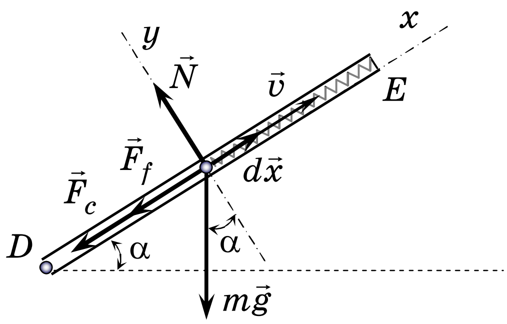
Окончательный вид расчетной формулы для скорости v_D *шарика в точке* D *будет следующим:*

$$v_D = v_B - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\tau + \frac{1}{m}\Psi(a,\tau)\,. \qquad \text{(Д3.10)}$$

2. *Если значение скорости шарика в положении* D *не будет нулевым, т.е.* $v_D > 0$, *то он продолжит свое движение на участке* DE, *и при этом будет сжимать пружину, расположенную на этом отрезке траектории. Действие силы* $F_x(t)$ *при этом прекратится.*

Очевидно, что на участке DE *существует такое положение шарика, при котором пружина будет сжата на некоторую конечную длину* Δ, *а скорость шарика при этом обратится в нуль, т.е. шарик остановится. Кинетическая энергия, которую имел шарик в точке* D, *будет полностью затрачена: на подъем шарика (преодоление силы тяжести), на преодоление силы трения качения и на деформацию пружины.*

Изобразим на новом рисунке движущийся шарик в некоторой промежуточной точке на прямолинейном участке DE *его траектории и приложим к шарику все действующие на него силы. Координатные оси* x *и* y *оставим без изменения.*



По теореме об изменении кинетической энергии будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = \mathrm{A}(m\vec{g}) + \mathrm{A}(\vec{N}) + \mathrm{A}(\vec{F}_c) + \mathrm{A}(\vec{F}_f)\,.$$

Определим значения для работ сил, если общее перемещение шарика вдоль оси x *составит* Δ *(до точки остановки* K*).*

Так как нормальная составляющая $\vec{N}$ *силы реакции будет в каждой точке участка* DE *перпендикулярна скорости* $\vec{v}$ *(или, что то же, элементарному перемещению* $d\vec{x}$*), то* $\mathrm{A}(\vec{N}) = 0$.

Сила трения скольжения $\vec{F}_f$ *постоянна по величине и противоположна по направлению элементарному перемещению* $d\vec{x}$, *поэтому ее работа вычисляется по формуле:*

$$\mathrm{A}(\vec{F}_f) = \int_0^\Delta (\vec{F}_f\cdot d\vec{x}) = \int_0^\Delta (-F_f\cdot dx) = -mgf\cos\alpha\cdot\int_0^\Delta dx = -mgf\cos\alpha\cdot\Delta\,.$$

Работа постоянной силы тяжести определяется аналогично:

$$\mathrm{A}(m\vec{g}) = \int_0^{\Delta}(m\vec{g}\cdot d\vec{x}) = \int_0^{\Delta}(-mg\sin\alpha\cdot dx) = -mg\sin\alpha\cdot\int_0^{\Delta}dx = -mg\sin\alpha\cdot\Delta.$$

Упругая сила имеет следующее векторное представление: $\vec{F}_c = -c\cdot\vec{x}$, *где* $\vec{x}$ *– вектор, направленный из положения, соответствующего недеформированному состоянию пружины, к текущему ее положению. В нашем случае вектор* $\vec{x}$ *будет направлен от точки* D *к шарику, сжимающему пружину.*

Работа упругой силы будет равна:

$$\mathrm{A}(\vec{F}_c) = \int_0^{\Delta}(-c\vec{x}\cdot d\vec{x}) = -c\cdot\int_0^{\Delta}(xdx) = -c\cdot\int_0^{\Delta}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = -c\cdot\frac{\Delta^2}{2}.$$

Теперь мы можем подставить все работы в выражение для теоремы об изменении кинетической энергии с учетом того, что кинетическая энергия в точке останова шарика обращается в ноль:

$$-\frac{mv_D^2}{2} = -mg\sin\alpha\cdot\Delta - mgf\cos\alpha\cdot\Delta - c\cdot\frac{\Delta^2}{2}.$$

Перепишем данное выражение в форме квадратного уравнения:

$$c\cdot\Delta^2 + 2mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\Delta - mv_D^2 = 0.$$

Общий вид корней этого уравнения

$$\Delta_{\pm} = \frac{-mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \pm \sqrt{[mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)]^2 + c\cdot mv_D^2}}{c}.$$

Искомым корнем этого уравнения будет, очевидно, тот, что соответствует знаку «+», поскольку деформация пружины не может быть отрицательной.

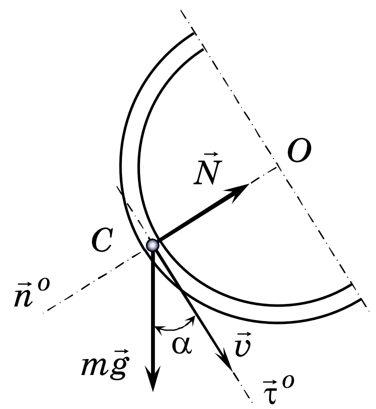
Следовательно, шарик остановится на участке DE, *когда деформация сжатой пружины достигнет расчетного значения* $\Delta = \Delta_+$:

$$\Delta = \frac{\sqrt{[mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)]^2 + c\cdot mv_D^2} - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{c}. \qquad (Д3.11)$$

3. *Осталось определить силу давления, которую развивает движущийся шарик на внутреннюю поверхность стенки трубки в ее точке* C.

По третьему закону Ньютона, сила динамического давления, оказываемая шариком на стенку трубки, равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции, с которой трубка действует на шарик. Поэтому, определив силу реакции трубки, мы одновременно найдем и силу давления шарика на трубку.

Для решения этой задачи (первая задача динамики материальной точки) удобно воспользоваться проекциями основного закона динамики несвободного движения на оси натурального триэдра. Выполним соответствующий рисунок.



Будем иметь векторный закон для несвободного движения материальной точки: $m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N}$.

Ускорение точки всегда имеет только две составляющие по *направлениям осей натурального триэдра:* $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}^{\,o} + \dfrac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}^{\,o}$, *где* ρ *– радиус кривизны для данной точки траектории. В нашем случае* $\rho = 2R$.

Тогда, в проекции на главную нормаль мы будем иметь:

$$m\frac{v_C^2}{2R} = N - mg\sin\alpha,$$

откуда искомое давление на стенку трубки (абсолютное значение):

$$N = m \cdot \left|\frac{v_C^2}{2R} + g\sin\alpha\right|. \qquad \text{(Д3.12)}$$

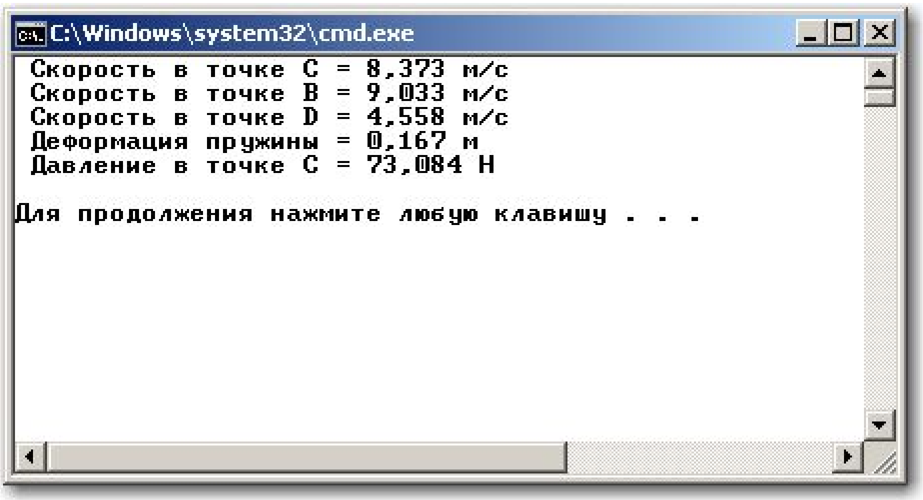
Последний результат свидетельствует о том, что движущейся шарик в положении C *будет давить на внешнюю поверхность трубки, а сила реакции* $\vec{N}$ *будет направлена к центру кривизны (как это показано на рисунке).*

Теоретическая часть задания выполнена.

Для проведения вычислений следует создать простое консольное приложение, предназначенное для вычисления искомых величин.

Примерная реализация такого приложения (программный код) приводится дальше на отдельном листе.

После выполнения программы:



заполним соответствующими данными таблицу результатов на титульном листе задания.

```
class Program
{
  static void Main(string[] args)
  {
    double g = 9.81;      // входные параметры задания
    double m = 1.5;
    double a = 2.0;
    double c = 10.0; c = 100 * c; // приведение к размерности [ Н / м ]
    double vA = 0.2;
    double f = 0.17;
    double R = 0.8;
    double alpha = 30.0;
    double tau = 0.9;

    double cos_a = Math.Cos(alpha * Math.PI / 180.0);
    double sin_a = Math.Sin(alpha * Math.PI / 180.0);

    // формула (Д3.5)
    double vC = Math.Sqrt(vA * vA + 4.0 * g * R * (2.0 * cos_a + sin_a));

    // формула (Д3.6)
    double vB = Math.Sqrt(vA * vA + 12.0 * g * R * cos_a);

    // формула (Д3.10)
    double vD = vB - g * (sin_a + f * cos_a) * tau + Psi(a, tau) / m;

    // формула (Д3.11)
    double z = m * g * (sin_a + f * cos_a);
    double delta = (Math.Sqrt(z * z + c * m * vD * vD) - z) / c;

    // формула (Д3.12)
    double N = m * (vC * vC / R / 2.0 + g * sin_a);

    string txt = string.Format(" Скорость в точке C = {0:F3} м/с ", vC);
    Console.WriteLine(txt);
    txt = string.Format(" Скорость в точке B = {0:F3} м/с ", vB);
    Console.WriteLine(txt);
    txt = string.Format(" Скорость в точке D = {0:F3} м/с ", vD);
    Console.WriteLine(txt);
    txt = string.Format(" Деформация пружины = {0:F3} м ", delta);
    Console.WriteLine(txt);
    txt = string.Format(" Давление в точке C = {0:F3} Н ", N);
    Console.WriteLine(txt);
  }

  static double Psi(double a, double t)     // формула (Д3.9)
  {
    double sqrt = Math.Sqrt(a * a + t * t);
    double ln = Math.Log(Math.Abs(t + sqrt) / Math.Abs(a));
    return (t * sqrt + a * a * ln) / 2.0;
  }
}
```